Bloque 3. Completitud de la lógica de primer orden.

Introducción al Teorema de Completitud.

`Teorema de Completitud`(1ª formulación). Sean L un lenguaje, T una L-teoría y F un enunciado de L. Si $T \models F$ entonces $T \vdash F$.

Significado del Teorema de Completitud

`Teorema de Completitud`(2ª formulación). Sea L un lenguaje. Toda L-teoría coherente tiene modelos.

`Prop.3.1.` Las dos formulaciones del Teorema de Completitud son equivalentes.

Idea de la demostración del Teorema de Completitud.

Teorías completas.

Teoría completa; ejemplos; teorías completas y extensiones del lenguaje. $\mathrm{Enun}(L) := \{F \in For(L) \mid F \text{ es un enunciado}\}$.

`Prop.3.2.` Sean L un lenguaje y T una L-teoría completa. Entonces,

(1) Todos los modelos de T satisfacen los mismos enunciados.

(2) Todos los modelos de T son elementalmente equivalentes.

`Prop.3.3.` Sean L un lenguaje y T una L-teoría coherente. Las siguientes propiedades son equivalentes.

(a) T es completa;

(b) Para cualquier $F, G \in \mathrm{Enun}(L)$, $T \vdash F \vee G$ implica $T \vdash F$ ó $T \vdash G$;

(c) $T' := \{F \in \mathrm{Enun}(L) \colon T \vdash F\}$ es maximal en el conjunto de L-teorías coherentes.

`Teorema de Lindenbaum.` Sea L un lenguaje. Toda L-teoría coherente se puede extender a una L-teoría coherente y completa.

Testigos de Henkin.

Testigos de Henkin (t. de H.), teorías que admiten t. de H.

`Lema.` Sean L un lenguaje, S una L-teoría coherente y $F(x)$ una L-fórmula con x libre. Sea c una constante que no aparezca ni en F ni en las fórmulas de S. Entonces $S \cup \{\exists x F \to F(c/x)\}$ es una teoría coherente.

`Teorema de Henkin.` Sea L un lenguaje. Toda L-teoría coherente se puede extender a una L'-teoría coherente y que admita testigos de Henkin, para un cierto lenguaje L' que contiene a L.

Teorema de Completitud.

`Teorema de la construcción de un modelo.` Sean L un lenguaje y T una L-teo coherente, completa y que admita t.de H. Entonces existe una L-estructura $\mathcal{A}$ modelo de T.

Demostración del Teorema de Completitud. Equivalencias sintáctico-semánticas.

Corolarios del Teorema de Completitud.

`Teorema de Löwenheim-Skolem descendente.` Sean L un lenguaje y T una L-teoría coherente. Entonces existe un modelo $\mathcal{A}$ de T tal que $Card(A) \leq Card(L)$.

Ejemplos de teorías con modelos numerables. La “paradoja” de Skolem.

`Teorema de Compacidad.` Sean L un lenguaje y T una L-teoría. Si toda parte finita $T_0 \subseteq T$ tiene un modelo entonces T tiene un modelo.

Formas equivalentes del Teorema de Compacidad.

Aplicaciones del Teorema de Compacidad.

`Teorema de Löwenheim-Skolem ascendente.` Sean L un lenguaje y T una L-teoría coherente con modelos infinitos. Sea κ un cardinal mayor o igual que $Card(L)$. Entonces existe un modelo $\mathcal{A}$ de T con $Card(A) = \kappa$.

`Prop.3.4.` Las siguientes propiedades no son finitamente axiomatizables.

(1) “*ser finito*”,

(2) “*ser cuerpo de característica cero*”.

`Prop.3.5.` Existen modelos no estándar de la Aritmética. Es decir, existe $\mathcal{A} \models Te(\mathcal{N})$, donde $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$, tal que $\mathcal{A} \ncong \mathcal{N}$.

`Prop.3.6.` Existen cuerpos no arquimedianos elementalmente equivalentes a $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, < \rangle$.